Exercice 1 : **Sur 4 points** ***(commun à tous les candidats)***

1. a. On a $e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
Donc sur $[1 , + \infty[$, $e^x - 1 \neq 0$ donc la fonction ***f*** **est bien définie sur** $[1 , + \infty[$.

Sur $[1 , + \infty[$, la fonction $x \mapsto x$ est continue.

Sur $[1 , + \infty[$, la fonction $x \mapsto e^x - 1$ est continue et non nulle.

Donc par quotient la fonction f est continue sur $[1 , + \infty[$.

Donc la fonction **H** définie par $H(x) = \int_1^x f(t)dt$ **existe et est bien définie sur** $[1 , + \infty[$.

b. $H(x) = \int_1^x f(t)dt$

Donc sur $[1 , + \infty[$, H est la primitive de f qui s'annule en 1.
Donc H'(x) = *f*(x)

c. On a $H(3) = \int_1^3 f(t)dt$

Sur $[1 , 3]$, $f(x)$ est positive donc le nombre H(3) est égale
à l'aire du domaine du plan délimité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 1 et x = 3.

2. Encadrement de H(3)

a. Pour tout réel $x > 0$: $\mathbf{\dfrac{x}{e^x - 1}} = x \times \dfrac{1}{e^x - 1}$

$$= x \times \frac{1}{e^x(1 - e^{-x})} \qquad (e^x \times e^{-x} = 1)$$

$$\mathbf{= x \times \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}} \qquad \frac{1}{e^x} = e^{-x}$$

b. $\int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 \dfrac{x}{e^x - 1}dx$

$$= \int_1^3 x\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}dx$$

Posons $u(x) = x$ et $v'(x) = \dfrac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$

$u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln(1 - e^{-x})$

$\dfrac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$ est du type $\dfrac{U'}{U}$, une primitive est donc ln U avec U > 0

Par intégration par partie :

$$\int_1^3 f(x)dx = \left[x\ln\left(1 - e^{-x}\right)\right]_1^3 - \int_1^3 1 \times \ln\left(1 - e^{-x}\right)dx$$

$$= 3\ln(1 - e^{-3}) - \ln(1 - e^{-1}) - \int_1^3 \ln\left(1 - e^{-x}\right)dx$$

$$\boldsymbol{\int_1^3 f(x)dx = 3\ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) - \int_1^3 \ln\left(1 - e^{-x}\right)dx}$$

c. Pour tout x ∈ [1 , 3] on a :

$1 \le x \le 3$

$e^1 \le e^x \le e^3$ car la fonction exponentielle est croissante sur [1 , 3]

$\frac{1}{e} \ge \frac{1}{e^x} \ge \frac{1}{e^3}$ car la fonction inverse est décroissante sur]0 ; + ∞[

$-\frac{1}{e} \le -\frac{1}{e^x} \le -\frac{1}{e^3}$ On multiplie par – 1 donc on change les sens de l'inégalité

$1-\frac{1}{e} \le 1-\frac{1}{e^x} \le 1-\frac{1}{e^3}$

$\mathbf{\ln\left(1-\frac{1}{e}\right) \le \ln\left(1-e^{-x}\right) \le \ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right)}$ car la fonction ln est croissante sur]0 ; + ∞[

d. Pour tout x ∈ [1 , 3] on a : $\ln\left(1-\frac{1}{e}\right) \le \ln\left(1-e^{-x}\right) \le \ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right)$

Par passage à l'intégrale : $\int_1^3 \ln\left(1-\frac{1}{e}\right)dx \le \int_1^3 \ln\left(1-e^{-x}\right)dx \le \int_1^3 \ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right)dx$

$\int_1^3 \ln\left(1-\frac{1}{e}\right)dx = \ln\left(1-\frac{1}{e}\right)\int_1^3 1.dx = 2\ln\left(1-\frac{1}{e}\right)$

$\int_1^3 \ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right)dx = \ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right)\int_1^3 1.dx = 2\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right)$

Donc un encadrement de $\int_1^3 \ln\left(1-e^{-x}\right)dx$ est :

$$\mathbf{2\ln\left(1-\frac{1}{e}\right) \le \int_1^3 \ln\left(1-e^{-x}\right)dx \le 2\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right)}$$

On obtient alors les encadrement suivants :

$$-2\ln\left(1-\frac{1}{e}\right) \ge -\int_1^3 \ln\left(1-e^{-x}\right)dx \ge -2\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right) \quad \text{On multiplie par } -1$$

$$3\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{e}\right)-2\ln\left(1-\frac{1}{e}\right) \ge \int_1^3 f(x)dx \ge 3\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{e}\right)-2\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right)$$

$$3\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right)-3\ln\left(1-\frac{1}{e}\right) \ge \int_1^3 f(x)dx \ge \ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

$$\mathbf{3\ln\frac{1-\frac{1}{e^3}}{1-\frac{1}{e}} \ge \int_1^3 f(x)dx \ge \ln\frac{1-\frac{1}{e^3}}{1-\frac{1}{e}}} \qquad \left(\ln A-\ln B=\ln\frac{A}{B}\right)$$

<u>Exercice 2 :</u> Sur 5 points (*Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*)

Partie A :

Le point M d'affixe z a pour image M' le point d'affixe z' par la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle α si : $\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha\ [2\pi] \end{cases}$

ΩM' = ΩM se traduit par : $\dfrac{\Omega M'}{\Omega M} = 1$ soit $\dfrac{|z' - \omega|}{|z - \omega|} = 1$ (d'après le pré requis)

$(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha\ [2\pi]$ se traduit par : $\arg\left(\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \alpha\ [2\pi]$ (d'après le pré requis)

Donc M a pour image M' dans la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle α si :

$\left.\begin{array}{r} \left|\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \alpha\ [2\pi] \end{array}\right\}$ Soit $\left(\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = e^{i\alpha}$ (d'après le pré requis)

Donc : **la rotation r d'angle α et de centre Ω d'affixe w est la transformation du plan, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$.**

Partie B :

1. a. Module et argument de z_A : $z_A = -\sqrt{3} - i$

$|z_A| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \mathbf{2}$ Donc $z_A = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\dfrac{1}{2}\right)$

$\mathbf{arg\ z_A} = \theta_A$ tel que : $\begin{cases} \cos\theta_A = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_A = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ donc $\mathbf{arg\ z_A = -\dfrac{5\pi}{6}}$

Module et argument de z_B : $z_B = 1 - i\sqrt{3}$

De même que pour z_A : $|z_B| = \mathbf{2}$ donc $z_B = 2\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ donc $\mathbf{arg\ z_B = -\dfrac{\pi}{3}}$

Module et argument de z_C : $z_C = \sqrt{3} + i$

$|z_C| = \mathbf{2}$ donc $z_C = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right)$ donc $\mathbf{arg\ z_C = \dfrac{\pi}{6}}$

Module et argument de z_D : $z_D = -1 + i\sqrt{3}$

$|z_D| = \mathbf{2}$ donc $z_D = 2\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ donc $\mathbf{arg\ z_D = \dfrac{2\pi}{3}}$

b. On a $|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = 2$ donc les points A, B, C et D sont sur le cercle de centre O et de rayon 2.

L'ordonnée de A est – 1 donc A appartient à la droite d'équation y = – 1.
L'abscisse de B est 1 donc B appartient à la droite d'équation x = 1.
L'ordonnée de C est 1 donc C appartient à la droite d'équation y = 1.
L'abscisse de D est – 1 donc D appartient à la droite d'équation x = – 1.

Pour tracer ces points, il faut tracer le cercle à l'aide du compas et les quatre droites à l'aide de la règle
A est donc le point d'intersection, d'abscisse négative, entre le cercle de centre O et de rayon 2 et la droite y = – 1.
B est donc le point d'intersection, d'ordonnée négative, entre le cercle de centre O et de rayon 2 et la droite x = 1.
C est donc le point d'intersection, d'abscisse positive, entre le cercle de centre O et de rayon 2 et la droite y = 1.
D est donc le point d'intersection, d'ordonnée positive, entre le cercle de centre O et de rayon 2 et la droite x = – 1.

c. Le milieu de [AC] a pour affixe : $\dfrac{z_A + z_C}{2} = 0$ c'est donc le point O.

Le milieu de [BD] a pour affixe : $\dfrac{z_B + z_D}{2} = 0$ c'est donc le point O.

Les diagonales du quadrilatère ABCD ont le même milieu, c'est donc un parallélogramme.

De plus comme les points A, B, C et D sont sur le cercle de centre O et de rayon 2
Donc les diagonales ont même longueur, le parallélogramme ABCD est donc un rectangle.

$$\frac{z_C - z_O}{z_B - z_O} = \frac{z_C}{z_B} = \frac{2e^{i\pi/6}}{2e^{-i\pi/3}} = e^{i\,\pi/2}$$

$(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}) = \arg\left(\dfrac{z_C - z_O}{z_B - z_O}\right) = \arg e^{i\,\pi/2} = \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$.

Les diagonales du rectangle ABCD se coupent en formant un angle droit. **Le rectangle ABCD est donc un carré.**

2. a. E = r(A) donc BA = BE donc E appartient au cercle de centre B passant par A.

$(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BE}) = -\dfrac{\pi}{3}$ et BA = BE donc le triangle BAE est équilatéral donc AE = AB donc E appartient au cercle de centre A et passant par B.

Pour construire le point E, il faut avec le compas construire ces deux cercles. Ces deux cercles se coupent en deux points, le point E est le point tel que $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BE}) = -\dfrac{\pi}{3}$.

Pour construire le point F, on procède de la même manière en traçant les cercle de centre B et passant par C et le cercle de centre C et passante par B. Ces deux cercles se coupent en deux points, le point F est le point tel que $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BF}) = -\dfrac{\pi}{3}$.

b. r est la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

Soit M' le point d'affixe z' image du M d'affixe z par r.

Alors l'écriture complexe de r est : $z' - z_B = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z - z_B)$

Soit $z' = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z - 1 + i\sqrt{3}) + 1 - i\sqrt{3}$

$= \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} + 1 - i\sqrt{3}$

$\mathbf{z' = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 2}$

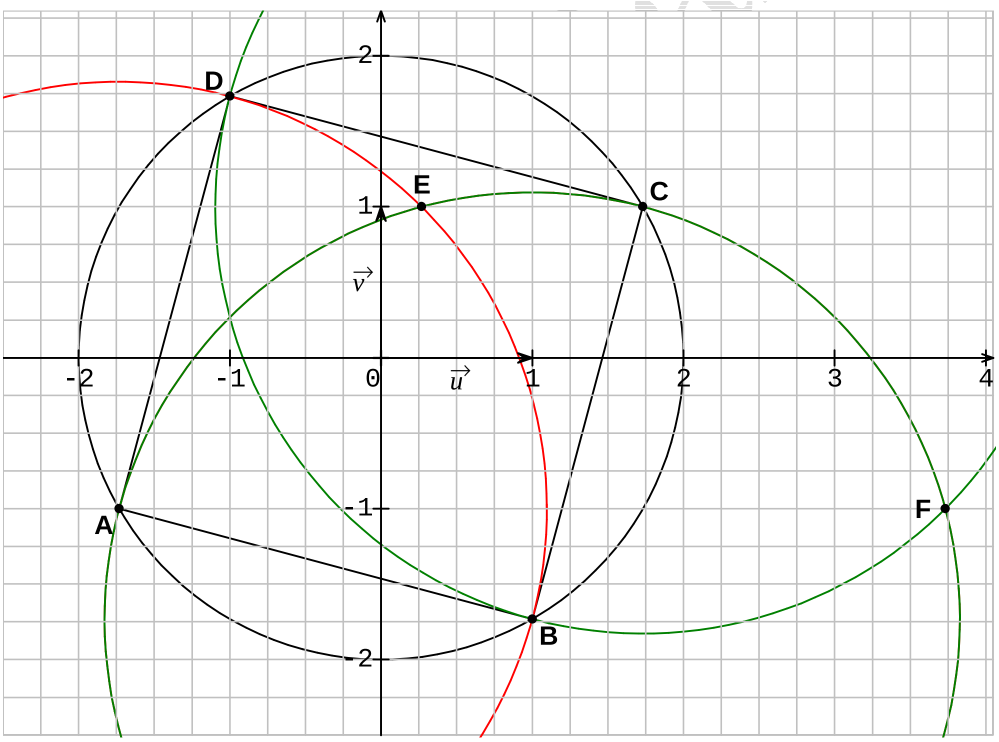
c. Affixe z_E de E : E = r(A)

$z_E = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_A + 2$

$= \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-\sqrt{3} - i) + 2$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2} - i\frac{1}{2} + 2$

$\mathbf{z_E = 2 - \sqrt{3} + i}$



<u>Exercice 2 (spécialité)</u>

Partie A

Soient z_A, z_B, $z_{A'}$ et $z_{B'}$ les affixes des points A, B, A', B'.On sait que : $z_A \neq z_B$ et $z_{A'} \neq z_{B'}$

Il existe une unique similitude transformant A en B et A' en B' si et seulement si il existe un unique couple (a ;b) de complexes (avec a non nul) tels que : $\begin{cases} z_{A'} = az_A + b \\ z_{B'} = az_B + b \end{cases}$

Résolvons ce système de deux équations à deux inconnues a et b.

$$\begin{cases} z_{A'} = az_A + b \\ z_{B'} = az_B + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_{A'} - z_{B'} = a(z_A - z_B) \\ b = z_{B'} - az_B \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_{A'} = az_A + b \\ z_{B'} = az_B + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{z_{A'} - z_{B'}}{z_A - z_B} \\ b = z_{B'} - \dfrac{z_{A'} - z_{B'}}{z_A - z_B} z_B \end{cases} \quad \text{car } z_A \neq z_B$$

Ce système admet une unique solution (a ;b) de complexes, et de plus a est non nul car :
$z_{A'} \neq z_{B'}$
Il existe donc une unique similitude transformant A en A' et B en B'.

Partie B

1. a. $|z_A| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2}$ d'où : $\boxed{|z_A| = 2}$

$z_A = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}\right) = 2\left[\cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)\right]$ d'où : $\boxed{\arg z_A = -\dfrac{5\pi}{6}}$

De même : $\boxed{z_B = z_C = z_D = 2}$

$z_B = 2\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + \sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$ d'où : $\boxed{\arg z_B = -\dfrac{\pi}{3}}$

$z_C = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right) = 2\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$ d'où : $\boxed{\arg z_C = \dfrac{\pi}{6}}$

$z_D = 2\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left[\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right]$ d'où : $\boxed{\arg z_D = \dfrac{2\pi}{3}}$

b. On a $|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = 2$ donc les points A, B, C et D sont sur le cercle de centre O et de rayon 2.

L'ordonnée de A est – 1 donc A appartient à la droite d'équation y = – 1.
L'abscisse de B est 1 donc B appartient à la droite d'équation x = 1.
L'ordonnée de C est 1 donc C appartient à la droite d'équation y = 1.
L'abscisse de D est – 1 donc D appartient à la droite d'équation x = – 1.

Pour tracer ces points, il faut tracer le cercle à l'aide du compas et les quatre droites à l'aide de la règle
A est donc le point d'intersection, d'abscisse négative, entre le cercle de centre O et de rayon 2 et la droite y = – 1.

B est donc le point d'intersection, d'ordonnée négative, entre le cercle de centre O et de rayon 2 et la droite x = 1.
C est donc le point d'intersection, d'abscisse positive, entre le cercle de centre O et de rayon 2 et la droite y = 1.
D est donc le point d'intersection, d'ordonnée positive, entre le cercle de centre O et de rayon 2 et la droite x = – 1.

c. Le milieu du segment [AC] a pour affixe : $\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{-\sqrt{3} - i + \sqrt{3} + i}{2} = 0$

Le milieu du segment [BD] a pour affixe : $\frac{z_B + z_D}{2} = \frac{1 - i\sqrt{3} - 1 + i\sqrt{3}}{2} = 0$

Donc $\boxed{\text{les diagonales [AC] et [CD] de ABCD ont même milieu : le point O}}$.
On en déduit que ABCD est un parallélogramme.

De plus : $\left|\frac{z_B}{z_A}\right| = \frac{|z_B|}{|z_A|} = \frac{2}{2}$ d'où : $\left|\frac{z_B}{z_A}\right| = 1$

$\arg \frac{z_B}{z_A} = \arg z_B - \arg z_A = -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}$ d'où : $\arg \frac{z_B}{z_A} = \frac{\pi}{2}$

d'où : $\boxed{\frac{z_B}{z_A} = i}$

On a donc : $\frac{|z_B|}{|z_A|} = 1$, c'est-à-dire : $\frac{OB}{OA} = 1$ d'où : OB = OA.

De plus : $\arg \frac{z_B}{z_A} = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}$

ABCD est un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires et de même longueur : Donc $\boxed{\text{ABCD est un carré}}$

2. a. Cherchons les points invariants de g :

$z' = z \Leftrightarrow z = e^{-i\frac{\pi}{3}} z + 2$

$z' = z \Leftrightarrow z = \frac{2}{1 - e^{-i\frac{\pi}{3}}}$

$z' = z \Leftrightarrow z = \frac{2}{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$z' = z \Leftrightarrow z = 1 - i\sqrt{3}$

g a donc pour $\boxed{\text{centre le point B d'affixe } 1 - i\sqrt{3}}$

$\left| e^{-i\frac{\pi}{3}} \right| = 1$, donc : $\boxed{\text{le rapport de g est 1}}$

$\arg e^{-i\frac{\pi}{3}} = -\frac{\pi}{3}$, donc : $\boxed{\text{l'angle de g est } -\frac{\pi}{3}}$

On remarque que g est la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

b. E = g(A) donc BA = BE donc E appartient au cercle de centre B passant par A.

$(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BE}) = -\frac{\pi}{3}$ et BA = BE donc le triangle BAE est équilatéral donc AE = AB donc E appartient au cercle de centre A et passant par B.
Pour construire le point E, il faut avec le compas construire ces deux cercles. Ces deux cercles se coupent en deux points, le point E est le point tel que $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BE}) = -\frac{\pi}{3}$.
On procède de même pour F et J.

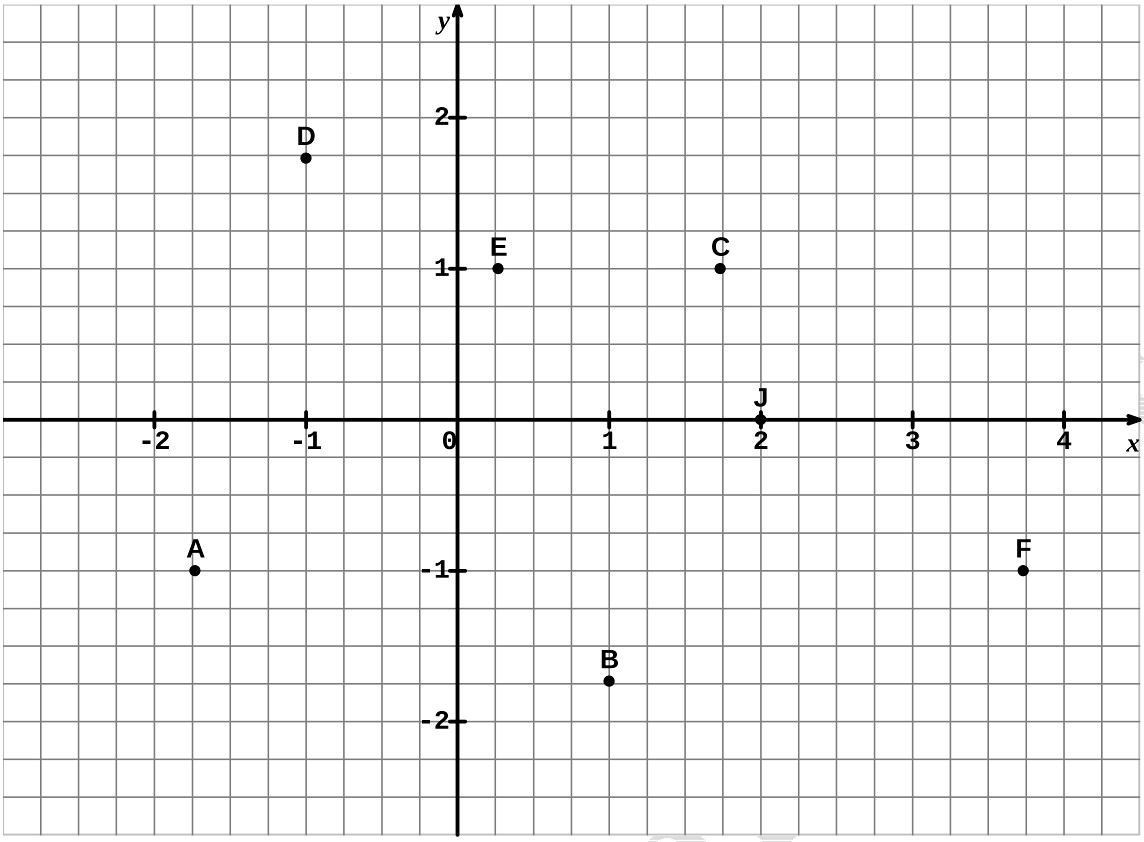
c. On constate graphiquement que J est le milieu de [EF]
(conservation des milieux par une similitude)

E est l'image de A par g, donc :
$$z_E = e^{-i\frac{\pi}{3}} z_A + 2$$
$$z_E = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times (-\sqrt{3} - i) + 2$$
$$\boxed{z_E = -\sqrt{3} + 2 + i}$$

De même pour F et J, on trouve :
$$z_F = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times (\sqrt{3} + i) + 2$$
$$\boxed{z_F = \sqrt{3} + 2 - i}$$

$$z_J = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times 0 + 2$$
$$\boxed{z_J = 2}$$

D'où : $z_F - z_J = -(z_E - z_J)$ d'où $\overrightarrow{JF} = -\overrightarrow{JE}$, d'où : $\boxed{\text{J est le milieu de [EF]}}$


y
2
1
-1
-2
-2
-1
0
1
2
3
4
x
D
E
C
J
A
F
B

<u>Exercice 3 :</u> Sur 4 points *(commun à tous les candidats)*

1. G est l'isobarycentre de A, B, C, D , donc : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

D'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{JD}=\vec{0}$

Or I est milieu de [AB] et J milieu de [CD], d'où : $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}=\vec{0}$

D'où : $2\overrightarrow{GI}+2\overrightarrow{GJ}=\vec{0}$

On en déduit que G est l'isobarycentre de I et J, c'est-à-dire le milieu de [IJ].
Donc G appartient à la droite (IJ).
De la même façon, on démontre que G appartient à (KL) puis à (MN).
$\boxed{\text{G est donc le point de concourance de (IJ), (KL) et (MN)}}$

2. a. Dans le triangle ABC, I est le milieu de [AB] et K le milieu de [BC], donc d'après le théorème des milieux, on en déduit que : $\overrightarrow{IK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

De la même façon : Dans le triangle ACD, on trouve : $\overrightarrow{LJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Dans le triangle BCD, on trouve : $\overrightarrow{KJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

On en déduit : D'une part : $\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{LJ}$, donc $\boxed{\text{IKJL est un parallélogramme}}$.

D'autre part : $IK=\frac{1}{2}AC$

$IK=\frac{1}{2}BD$ (car AC = BD)

$\boxed{IK=KJ}$

IKJL est un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs égaux, donc : $\boxed{\text{IKJL est un losange}}$.

De même, $\boxed{\text{IMJN et KNLM sont des losanges}}$.

b. IKJL est un losange, donc ses diagonales sont perpendiculaires.
D'où : $\boxed{\text{(IJ) et (KL) sont orthogonales}}$.

3. a. (KL) et (MN) sont non confondues et sont sécantes en G, donc elles définissent le plan (MNK) qui passe par les points K, L, M, et N.
(IJ) est orthogonale à (KL) et à (MN), donc $\boxed{\text{(IJ) est orthogonale au plan (MNK)}}$.

b. (IJ) est orthogonale au plan (MNK), donc à toute droite de ce plan.
D'où : (IJ) est orthogonale à (MK)

Donc : $\boxed{\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{MK}=0}$

D'après le théorème des milieux dans le triangle ABC, on a : $\overrightarrow{MK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{AB} = 2\ \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{MK}$ D'où : $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$
On en déduit que (IJ) est orthogonale à la droite (AB).

De même, (IJ) est orthogonale au plan (MNK), donc à toute droite de ce plan.
D'où : (IJ) est orthogonale à (ML)
Donc : $\boxed{\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{ML} = 0}$

D'après le théorème des milieux dans le triangle ADC, on a : $\overrightarrow{ML} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

Donc : $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{CD} = 2\ \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{ML}$ D'où : $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$
On en déduit que (IJ) est orthogonale à la droite (CD).

c. (IJ) est orthogonale à (AB), donc (IJ) appartient au plan orthogonal à (AB) passant par I.
Or I est le milieu de [AB], donc ce plan est le plan médiateur de [AB].
De plus, d'après **1.**, G appartient à (IJ), donc G appartient au plan médiateur de [AB].
De même, (IJ) est orthogonale à (CD) et J est le milieu de [CD], donc (IJ) appartient au plan médiateur de [CD]. G appartient à (IJ), donc G appartient au plan médiateur de [CD].

d. G appartient au plan médiateur de [AB], donc : GA = GB.
G appartient au plan médiateur de [CD], donc : GC = GD.
Pour que g soit le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD, il faut que :
GA = GB = GC = GD.
Il reste donc à montrer que : GB = GC, donc que G appartient au plan médiateur de [BC].

De la même manière que pour (IJ) orthogonale à (MNK), on montre que (KL) est orthogonale au plan (MNJ), puis que (KL) est orthogonale à (BC) et enfin qu'elle appartient au plan médiateur de [BC].
G appartenant à (KL) d'après **1.**, on a bien : G appartient au plan médiateur de [BC].

<u>Exercice 4 :</u> Sur 7 points *(commun à tous les candidats)*

Partie A : un modèle discret

1. a. f est une fonction polynôme, donc sur [0 ; 20] f est dérivable.

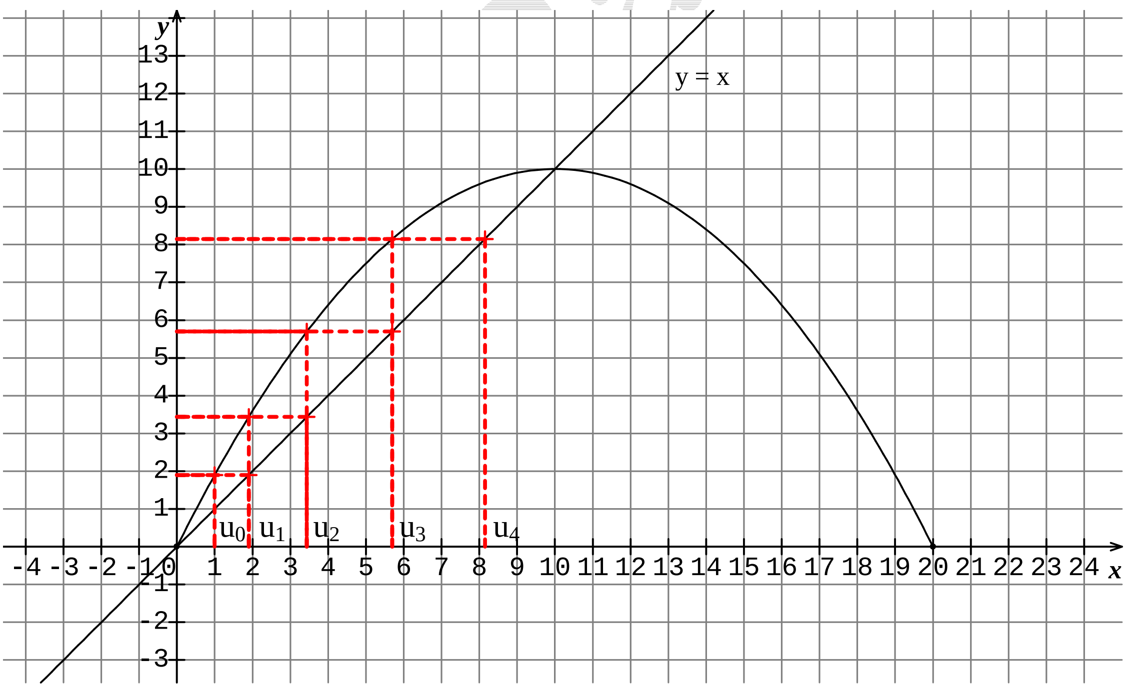
Pour tout x de [0 ; 20] : $f'(x) = \frac{1}{10}(20 - x) + \frac{1}{10} x \times (-1)$

$$= \frac{1}{10}(20 - x - x)$$
$$= \frac{1}{10}(20 - 2x)$$
$$= \frac{1}{5}(10 - x)$$

Sur [0 ; 10] 10 – x > 0 donc $f'(x)$ est positive donc f est croissante.
Sur [10 ; 20] 10 – x < 0 donc $f'(x)$ est négative donc f est décroissante.

b. Pour tout $x \in [0 ; 10]$, f est croissante donc : $f(0) \leq f(x) \leq f(10)$
$f(0) = 0$ et $f(10) = 10$,
On en déduit donc que pour tout $x \in [0 ; 10]$, $f(x) \in [0 ; 10]$

c. Pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{10} u_n (20 - u_n) = f(u_n)$.



2. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$.
Au rang 0 : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1{,}9$ donc $0 \leq 1 \leq 1{,}9 \leq 10$. la propriété est vraie au rang 0.

Supposons à un rang n la propriété vraie : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$.
Au rang n + 1 :
La fonction f est croissante sur [0 ; 10] donc :

$$f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(10) \text{ soit } 0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 10.$$

La propriété est donc vraie au rang n + 1.
La propriété est donc héréditaire et comme elle est vraie pour n = 0, elle est donc vraie pour tout n.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$, donc la suite u_n est croissante et majorée par 10, donc elle est convergente vers une limite ℓ.
La fonction f est continue sur [0 ; 10] car c'est une fonction polynôme, donc la limite ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$ car la fonction f est continue sur [0 ; 10]

$$\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell = \frac{1}{10}\ell(20 - \ell)$$
$$\Leftrightarrow 10\ell = 20\ell - \ell^2$$
$$\Leftrightarrow \ell^2 - 10\ell = 0$$
$$\Leftrightarrow \ell = 0 \text{ ou } \ell = 10$$

La solution $\ell = 0$ est impossible car $u_0 = 1$ donc $\ell \geq 1$.
Donc la limite de la suite u_n est 10.

Partie B : un modèle continu

Soit g(x) le nombre, exprimé en millions, de tels foyers l'année x. On pose x = 0 en 2005, g (0) = 1 et g est une solution, qui ne s'annule pas sur $[0, +\infty[$, de l'équation différentielle

$$(E) : y' = \frac{1}{20} y (10 - y)$$

1. On considère une fonction y qui ne s'annule pas sur $[0, +\infty[$ et on pose $z = \frac{1}{y}$.

a. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle :

$$(E_1) \quad : \quad z' = -\frac{1}{2} z + \frac{1}{20}.$$

On remarque que : z ne s'annule pas sur $[0, +\infty[$, donc : $z = \frac{1}{y} \Leftrightarrow y = \frac{1}{z}$

d'où : $y' = -\frac{z'}{z^2}$

y est solution de (E) $\Leftrightarrow$ $y' = \frac{1}{20} y (10 - y)$

y est solution de (E) $\Leftrightarrow$ $-\frac{z'}{z^2} = \frac{1}{20} \times \frac{1}{z} \times (10 - \frac{1}{z})$

y est solution de (E) $\Leftrightarrow$ $z' = -z^2 \times \frac{1}{20} \times \frac{1}{z} \times (10 - \frac{1}{z})$

y est solution de (E) ⇔ $z' = -\frac{z}{20} \times (10 - \frac{1}{z})$

y est solution de (E) ⇔ $z' = -\frac{1}{2} z + \frac{1}{20}$

Donc :**y est solution de (E) si et seulement si z est solution de(E_1)**

b. Les solution de (E_1) sont les fonctions z de la forme :

$$z(x) = C\, e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{\frac{1}{20}}{-\frac{1}{2}} \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{z(x) = C\, e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{10}} \qquad \textbf{avec } \mathbf{C \in \mathbb{R}}$$

D'où : les solutions de (E) sont les fonctions y telles que :

$$\frac{1}{y}(x) = C\, e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{10} \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{y(x) = \frac{1}{C\, e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{10}}} \qquad \textbf{avec } \mathbf{C \in \mathbb{R}}$$

2. g est la solution de (E) telle que g(0) = 1. D'où : $g(x) = \frac{1}{C\, e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{10}}$ et g(0) = 1

Donc : $1 = \frac{1}{C + \frac{1}{10}}$

$C = 1 - \frac{1}{10}$

$C = \frac{9}{10}$

D'où : $g(x) = \frac{1}{\frac{9}{10} e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{10}}$

$$\mathbf{g(x) = \frac{10}{9 e^{-\frac{1}{2}x} + 1}}$$

3. g est dérivable sur [0, + ∞[et on a : $g'(x) = -10 \times \frac{-\frac{9}{2} e^{-\frac{1}{2}x}}{.(9 e^{-\frac{1}{2}x} + 1)^2}$

$$g'(x) = \frac{45 e^{-\frac{1}{2}x}}{(9 e^{-\frac{1}{2}x} + 1)^2}$$

g' est strictement positive car la fonction exponentielle est strictement positive.

Donc **g est strictement croissante** sur [0, + ∞[.

4. Calculons la limite de g en + ∞ :

$\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{2}x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc par composition : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\frac{1}{2}x} = 0$

D'où : $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 10}$

On en déduit que le nombre de foyers possédant un tel équipement ne pourra pas atteindre les 10 millions, mais qu'il devrait s'en rapprocher à long terme.

5. En quelle année le nombre de foyers possédant un tel équipement dépassera-t-il 5 millions ?

$g(x) \geq 5 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{10}{9e^{-\frac{1}{2}x} + 1} \geq 5$

$g(x) \geq 5 \quad \Leftrightarrow \quad 10 \geq 45\, e^{-\frac{1}{2}x} + 5$ car $9e^{-\frac{1}{2}x} + 1 > 0$

$g(x) \geq 5 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{9} \geq e^{-\frac{1}{2}x}$

$g(x) \geq 5 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\frac{1}{9} \geq -\frac{1}{2}x$ car ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

$g(x) \geq 5 \quad \Leftrightarrow \quad -\ln 9 \geq -\frac{1}{2}x$

$g(x) \geq 5 \quad \Leftrightarrow \quad 2\ln 9 \leq x$

Or : $2\ln 9 \approx 4{,}4$

Donc : le nombre de foyers possédant un tel équipement dépassera les 5 millions la **5ème année**.